
Modelagem e criação de um modelo de Matching Learning para o transporte de poluentes no trecho urbano do Rio Uberabinha: utilizando EDPs

Estudantes: Adelson Couto (adelsoncouto2@gmail.com); Victor Rodrigues (victorrf591@gmail.com); Gustavo Santana (laisemonikesantana25@gmail.com)

Orientador: Waldemar Nunes de Freitas Filho (waldemar.freitas@ufu.br)

Coorientadora: Mayara Ribeiro (mayara_ribeiro04@yahoo.com.br)

Escola: Colégio Tiradentes da Polícia Militar de Uberlândia

Resumo

Analisando os impactos ambientais causados no Rio Uberabinha nos últimos anos, o presente estudo busca, a partir de equações diferenciais parciais, utilizando a equação de advecção unidimensional, aferir qual a capacidade do Rio Uberabinha de depor os dejetos acumulados sobre ele. Para atingir esse objetivo, utilizamos um sistema de *Machine Learning*, com *Physics-Informed Neural Network* (PINN), que informa o coeficiente de decaimento da equação, além da solução expressa em um gráfico 3D. Os resultados obtidos foram satisfatórios, uma vez que expressaram que, em um período de 20 segundos, na posição de 13 metros do rio, haverá uma concentração referente a 13% do que foi depositado na posição zero, com as soluções analíticas indicando o mesmo. Ademais, o gráfico 3D exibe diversas soluções da EDP, permitindo a interação do usuário com ele. Desse modo, nosso projeto se mostra promissor, considerando sua aplicabilidade nas mais diversas áreas às quais essa equação se aplica, além do possível auxílio para a elaboração de políticas públicas.

Palavras-chave: Equações diferenciais parciais, Machine Learning, Equação de Advecção Unidimensional.

Introdução e justificativa

O Rio Uberabinha é a principal fonte de abastecimento hídrico em Uberlândia, e sua preservação tange à sociedade como um todo. Contudo, em um relatório de 2021, realizado pela Associação para a Gestão Socioambiental do Triângulo Mineiro (Angá) para o denominado Projeto Uberabinha, vislumbrou-se uma degradação de 78% na área de 2000 km²

da bacia, tanto no que envolve a mata ciliar quanto no seu próprio leito. Essa degradação adveio, principalmente, por conta das atividades agropecuárias desenvolvidas durante todo o seu canal, com destaque para monoculturas de soja, milho e cana-de-açúcar.

Para elucidar ainda os prejuízos que as grandes propriedades agrícolas causam ao situar-se próximas do rio, pode-se mencionar um acidente que ocorreu em 2023, quando uma barragem de um latifúndio, o qual cultivava trigo, estourou, e alguns resquícios de lama atingiram o Uberabinha.

As equações diferenciais parciais (EDPs) são equações expressas por derivadas parciais, as quais contemplam diversas variáveis, podendo ser classificadas conforme sua ordem: as de primeira ordem são aquelas que contemplam derivadas primeiras e as de segunda ordem, derivadas quadráticas. Por estarem associadas a mais de uma variável, há casos em que o número de soluções para essas equações explode; logo, buscam-se condições iniciais e de contorno para garantir a unicidade ou para limitar o número de resultados.

Consoante a esse cenário, existe uma equação diferencial parcial caracterizada por apresentar duas ou mais variáveis dependentes, que demonstra o fluxo de advecção com decaimento. A advecção refere-se ao transporte de sedimentos e poluentes que acontecem de forma natural no rio, pela velocidade com que sua corrente os propaga e reduz. O “decaimento” aqui apresentado corresponde à taxa de redução dos sedimentos a partir de processos como sedimentação, decomposição, degradação etc., além dos dejetos que se dispersam no leito do rio.

Desse modo, tem-se a seguinte equação:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = -kC \quad \dots Eq. 1$$

Onde:

- C = concentração de poluentes
- t = tempo (s)
- x = espaço (m)
- u = velocidade média da água (m/s)
- k = taxa de decaimento do número de sedimentos

As condições de contorno para esse problema são:

1. A concentração de poluentes deve aumentar de maneira uniforme ou todo o poluente deve ser depositado em um mesmo momento. De forma análoga, considerando que o poluente depositado seja dado por uma função $f(x)$, tem-se $f(x) = x$ ou $f(x) = c$, onde c é uma constante.
2. Em situações idealizadas, considera-se que $\lim_{x \rightarrow \infty} C(x, t) = 0$, o que significa que, quando a posição tende ao infinito, o número de poluentes se anula.

Com o intuito de aplicar esses dados ao Rio Uberabinha, e possibilitar a aplicação em quaisquer outros rios e ambientes que se enquadrem nessa equação, foi elaborado um sistema de *Machine Learning* (ML) utilizando *Physics-Informed Neural Network* (PINN), que se vale de leis físicas para resolver EDPs, implementado em Python com bibliotecas como *matlib*, *numpy*, *torch* e *flask*.

Para a obtenção dos dados necessários à resolução da EDP no caso do Rio Uberabinha, utilizou-se uma pesquisa disponível no acervo da UFU, denominada “*Condições de Oxigenação e Desoxigenação de um Trecho do Rio Uberabinha*” (Juliano Martins da Silva de Almeida, 2013).

Objetivos

O presente estudo possui como objetivo geral investigar a capacidade do próprio Rio Uberabinha de transcorrer os sedimentos naturais e os detritos humanos nele impelidos, utilizando, para isso, uma equação diferencial parcial (EDP). Como objetivo específico, temos o propósito de criar um sistema de *Machine Learning* que resolverá equações de advecção ligadas a rios, no qual o usuário insere dados do rio em questão e obtém como resposta um gráfico de concentração em função do espaço em diferentes tempos.

Metodologia

O presente estudo foi estruturado com base em métodos computacionais, no que se refere à elaboração de gráficos 3D e à resolução de EDPs, bem como em pesquisas

bibliográficas, a partir de artigos, livros e teses de mestrado. Para a elaboração do gráfico e a determinação do coeficiente de decaimento, utilizamos a linguagem de programação Python com as bibliotecas *numpy*, *plotly graph objects* e *matplotlib*.

Além disso, houve a verificação dos dados obtidos computacionalmente a partir da análise das soluções analíticas, observando-se a validação idônea dos gráficos. A seguir, apresentam-se os gráficos e resultados para o trecho do Rio Uberabinha, embaixo da Ponte Sívio Rugani, próximo ao bairro Tubalina, considerando $u = 0,7m/s$ e $C = 1$.

Partindo desse pressuposto, pode-se obter o valor da taxa de decaimento dos sedimentos do Rio Uberabinha vislumbrado na Figura 1

Percebe-se, nesse caso, a aproximação da expressão que calcula k , resultando em 0,1 sendo que a expressão analítica desse resultado é dada por:

$$k = -\frac{\partial_t C + u\partial_x C}{C}$$

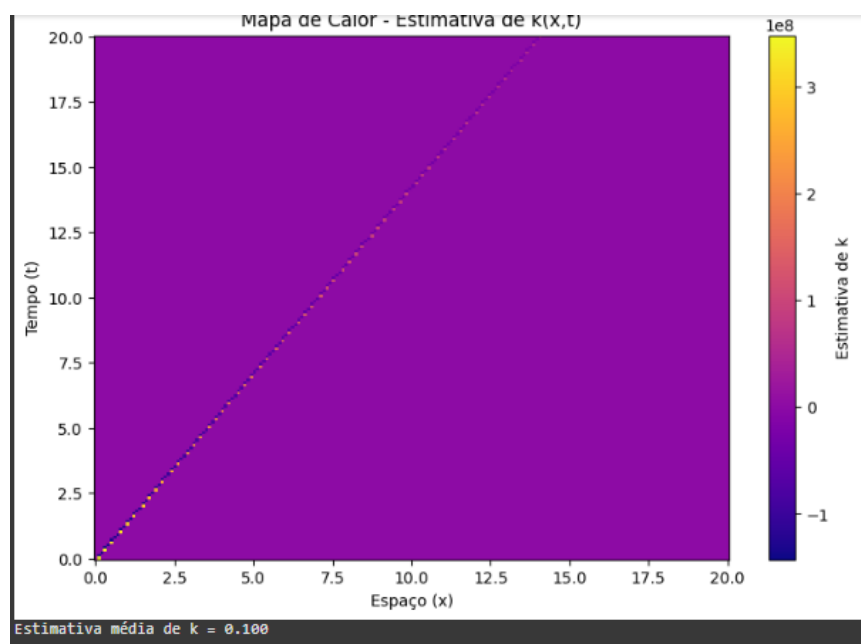


Figura 1: Estimativa do k . Figura do autor

Evolução da concentração no espaço-tempo (3D Interativo)

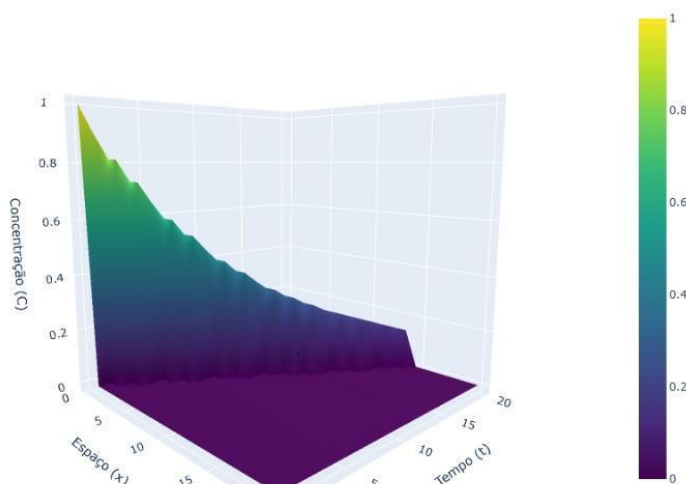


Figura 2: Gráfico 3D da advecção do trecho da Ponte Silvio Rugani para $x = 20m$ e $t = 20s$. Fonte: Figura do autor

À luz desse resultado, pode-se então obter o gráfico 3D dessa função (Figura 2). Pela análise gráfica, infere-se que, em um período de 10 segundos, na localização de 6 metros, haverá um total de poluente equivalente a 35% da quantidade situada na posição inicial, significando, assim, que os outros 65% ou foram refreados, ou estão distribuídos ao longo do curso dos 6 metros analisados no rio.

Resultados e Discussão

Nesta seção você deve colocar em evidência os resultados (positivos e/ou negativos) que a realização da experiência proporcionou. Além dos resultados, é importante discuti-los, relacionando-os com outros trabalhos já realizados e publicados sobre o tema, que foram citados na introdução.

Na discussão descreva o que o trabalho ensinou, citando se o objetivo foi adequadamente atingido, e no caso de ter formulado uma pergunta de pesquisa, qual a resposta obtida.

Conclusões

Em suma, o nosso projeto, ao visar solucionar a equação de advecção com decaimento — que é uma EDP — desenvolveu um sistema de *Machine Learning* baseado em PINN, o qual se mostra funcional para quaisquer rios, além de um código que exprime o valor do decaimento da concentração de poluentes.

Esse trabalho e os códigos aqui apresentados podem ser utilizados por diversas áreas que fazem uso da equação de advecção, podendo contribuir para o planejamento de políticas públicas voltadas ao desenvolvimento hídrico, a partir da previsão da capacidade do rio de abster-se dos sedimentos nele despejados.

Como limitação, tem-se que a equação aqui utilizada é apenas a de advecção unidimensional, não contemplando a profundidade e a altura do rio, considerando-se tão somente sua largura. Além disso, não foi incluído o efeito da dispersão do rio, que leva em conta a passagem e a mistura das áreas com maior concentração de poluentes para aquelas com menor concentração.

Referências

UBERLÂNDIA. Prefeitura. *Rio Uberabinha*. Portal da Prefeitura de Uberlândia, [s.d.]. Disponível em: <https://www.uberlandia.mg.gov.br/prefeitura/secretarias/gestao-ambiental-e-sustentabilidade/rio-uberabinha>. Acesso em: 30 ago. 2025.

ROCHA, A. Barragem se rompe e atinge rio Uberlândia, no Triângulo Mineiro. *O Tempo*, 2022. Disponível em: <https://www.otempo.com.br/cidades/barragem-se-rompe-e-atinge-rio-uberlandia-no-triangulo-mineiro-1.2704113>. Acesso em: 30 ago. 2025.

MATHWORKS. *What Is Machine Learning?*. [s.d.]. Disponível em: <https://www.mathworks.com/discovery/machine-learning.html>. Acesso em: 30 ago. 2025.

STEWART, J. *Cálculo: volume 2*. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

MATHWORKS. *What Are Physics-Informed Neural Networks (PINNs)?*. [s.d.]. Disponível em: <https://www.mathworks.com/discovery/physics-informed-neural-networks.html>. Acesso em: 05 set. 2025.

MATHWORKS. *Solve PDE Using Physics-Informed Neural Network*. [s.d.]. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/deeplearning/ug/solve-partial-differential-equations-with-lbfgs-method-and-deep-learning.html>. Acesso em: 07 set. 2025.

ALMEIDA, J. *Condições de oxigenação e desoxigenação de um trecho do Rio Uberabinha no município de Uberlândia*. 2019. Dissertação (Mestrado em Engenharia Ambiental) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2019.